Bemerkungen zur Ausbildung in Mathematik

R. Seydel , Würzburg

Man sagt, daß der Computer eine erneute industrielle Revolution verursacht. In gleicher Weise verändert dieses neue Werkzeug die Mathematik, und auch andere Disziplinen der Wissenschaft. Die Veränderungen in der Mathematik sind vielschichtig, und können hier nur kurz gestreift werden. Sie *müssen* erwähnt werden, da sie von großer Tragweite für die Ausbildung in Mathematik sind. Die Mathematik-Ausbildung darf die Mathematik-Wirklichkeit nicht verzerren.

1. Zum Stand der Mathematik

Heute gibt es innerhalb der Mathematik Disziplinen, die es vor 30 oder 40 Jahren nicht gegeben hat (wie die Numerische Mathematik); andere Disziplinen haben sich stark weiterentwickelt. Ein Beispiel für letztere sind Differentialgleichungen, die mit den dynamischen Systemen und dem faszinierenden Gebiet nichtlinearer Phänomene (Schlagworte *Bifurkation, Chaos* [9]) zusammenhängen. Ein anderes Beispiel ist die Fächergruppe um Optimierung, die dem Werkzeug Computer viel verdankt. Hierzu gehören auch Optimale

Steuerungen und als zukunftsträchtiges Gebiet "Robotics" [11]. Schließlich sei noch die "Diskrete Mathematik" erwähnt [8], unter der wir hier einen Querschnitt durch Gebiete wie Differenzengleichungen, Rekursionen und Graphentheorie, einschließlich ihrer Anwendungen, verstehen wollen. Die gerade erwähnten mathematischen Fächer haben ihre Wirkungsmöglichkeiten explosionsartig erweitert, im wesentlichen auf Grund der numerischen Möglichkeiten.

Genauso bemerkenswert ist, was sich "außerhalb" der Mathematik abspielt. Alle Einzelwissenschaften werden von der Mathematik mehr und mehr abhängig (nicht unbedingt von den Mathematikern). Die Mathematisierung schreitet rapide voran. Der wesentliche Grund hierfür ist, daß vermehrt Experimente durch mathematische Modellierung mit anschliessender numerischer Simulation *ersetzt* werden. Seitdem zur Simulation leistungsfähige Rechner und schnelle Algorithmen verfügbar sind, lassen sich wirklichkeitsnahe Lösungen zu schwierigen Problemen berechnen; früher notwendige Vereinfachungen wie Linearisierung oder Annahme von Symmetrien können nach und nach entfallen. Nicht nur die Wissenschaften (im Sinne von *science and technology*) profitieren von der Mathematik, sondern umgekehrt nimmt auch die Mathematik wertvolle Impulse von "außen" auf. Die Mathematik ist heute, und vermehrt noch in Zukunft, *die für alle Wissenschaften zentrale Disziplin.*

Im folgenden werden einige wenige der Beispiele erwähnt, bei denen die Mathematik entscheidend ist. In der *Wettervorhersage* ist die Zuverlässigkeit der Prognosen drastisch gestiegen, seitdem man die zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen numerisch lösen kann. Die *Tomographie* ist sogar schon in Tageszeitungen populär geworden, nicht aber die Tatsache, daß es sich hier um Mathematik handelt (Linienintegrale, Radon-Transformation [6]). Für die Ermittlung von *Flugbahnen für Raumfahrzeuge* müssen schwierige Probleme optimaler Steuerungen behandelt werden, Nebenbedingungen oder Zielvorgaben können minimaler Treibstoffverbrauch oder nicht zu große Aufheizung sein [12]. Die Untersuchung von *Strömungsproblemen* bedarf eines großen mathematischen Apparates, belohnt aber durch reiche qualitative Offenbarungen. So müssen vor dem Bau von Herzschrittmachern oder künstlichen Herzklappen der Herzschlag (Navier-Stokes Gleichungen [7]) und die Nervenleitung (z.B. Modell für Purkinje Nerv [5]) analysiert werden. Bei der Entwicklung von Flugzeugen ersetzt häufig ein *numerischer Windkanal*, ein Bündel von mathematischen Werkzeugen und Prozeduren, die tatsächlichen Windkanalexperimente. Viele weitere Beispiele (wie Schwingungsverhalten von Gittermasten oder Schiffen, Beulverhalten von Rohren und schalenartigen Konstruktionen) belegen einen entscheidenden Einfluß der Mathematik [2, 3].

Mit der Ausweitung der Mathematik hat sich auch ihr Charakter verändert. Früher eher als *Gleichungs*-Löser gesehen, wächst die Mathematik in das *Problem*-Lösen hinein: Modellierung und Interpretation kommen als mathematische Aufgaben hinzu, wenn ingenieurmäßige Intuition nicht mehr ausreicht. Das heißt, die Mathematik ist in wachsendem Maß für alle drei Schritte der klassischen Arbeitsweise

Modellierung → Lösung → Interpretation

zuständig. Parallel dazu tritt die Mathematik als *Sprache* auf, als *erklärende Wissenschaft*. Dies sei illustriert durch eine Reihe von Beispielen: Die Phänomene Oberschwingung, Phasensprung (z.B. wichtig für Stereorundfunk) oder Grenzzykel (wichtig für alle Formen von "Leben" vom Nervenimpuls bis zur chemischen Reaktion) lassen sich ohne die Sprache der Mathematik kaum fassen. Noch klarer kann die Notwendigkeit der Mathematik als Sprache mit der folgenden Liste von Fragen illustriert werden:

* Warum ist es unterhalb des Haupt-Regenbogens heller als oberhalb?
* Was ist die PAL-Idee beim Farbfernsehen?
* Was könnte im Taschenrechner vorgehen, wenn man z.B. auf die SINUS-Taste drückt?
* Warum muß beim Schallplattenspieler der Tonarm länger sein als die "Einbautiefe"?

Bei diesen und anderen *Fällen* ist die Mathematik zur Erklärung unentbehrlich [10]. Wir wollen das hier nicht weiter ausweiten, und fassen obige Ausführungen mit einer (hier verkürzten) Aussage des David-Report [2, 1, 4] zusammen:

Hochtechnologie ist Mathematische Technologie.

Die geschilderte Entwicklung könnte an den Mathematikern vorbei gehen. Der Bedarf an Mathematik ist noch wenig artikuliert und in der Öffentlichkeit kaum bekannt. Es besteht für die Mathematiker die Gefahr, daß die anderen Wissenschaften den Bedarf selbst decken. Als Beispiel aus der Physik sei angeführt das Auftreten der Fachrichtung "Computational Physics", die im wesentlichen Numerische Mathematik ist. Ingenieure und Naturwissenschaftler sind häufig nicht nur in der Modellierung, sondern auch in der Numerischen Mathematik gut bewandert. Und für die meisten numerischen Aufgaben gibt es allgemein verfügbare Computer-Programme. Im Hinblick auf die zunehmende Bedeutung von *software* könnte ein Außenstehender die Mathematik mit der Informatik verwechseln. Solche Beispiele deuten die Möglichkeit an, daß der Bedarf an Mathematik zunehmen könnte, ohne daß der Bedarf an Mathematikern Schritt hält. Natürlich kann der Mathematiker nicht das Monopol für Mathematik beanspruchen, aber er sollte hierin die anerkannte Autorität sein, soweit das bei der ausufernden Disziplin noch möglich ist.

2. Folgerungen für die Ausbildung

Nachdem oben versucht worden ist, den Hintergrund für eine Ausbildung in Mathematik etwas zu erhellen, sollen nun einige Bemerkungen zur Ausbildung selbst folgen. Der Mathematik-Lehrer ist der erste Botschafter der Mathematik, wegen seiner Breitenwirkung auch der wichtigste. Der Lehrer muß nach Geist und Inhalt die Macht der Mathematik kennenlernen und weitergeben können. Da diese Forderung je nach Standpunkt alles rechtfertigen kann, sei sie wie folgt ergänzt: Die Ausbildung darf nicht von der Mathematik der Hochtechnologie abkoppeln.

Wie kann man den zukünftigen Lehrer zu solchen Kenntnissen verhelfen? Es sollte ihm dringend nahegelegt werden, die Kursvorlesungen *Differentialgleichungen* und *Numerische Mathematik* zu hören. Es sind hier die Standard-Vorlesungen gemeint, denn diese verhelfen am besten zu einer Seriosität der Ausbildung: Probleme wie die Erzeugung einer Schneeflocke auf dem Bildschirm oder die Berechnung von π auf Millionen Stellen können zwar lehrreich sein und einen hohen Spielwert haben, lenken aber vom eigentlichen Anliegen ab. Die Bedeutung der Differentialgleichungen (einschließlich qualitativer Methoden) kann kaum überschätzt werden. Diese Disziplin ist einerseits die wichtigste und oft einzige Nahtstelle zwischen Mathematik und Ingenieur- oder Naturwissenschaften, und andererseits eine Synthese zwischen sogenannter "reiner" und "angewandter" Mathematik. (Die scheinbare Trennung zwischen beiden Betrachtungsweisen ist nach Lax [4] nur eine vorübergehende Erscheinung.) Differentialgleichungen dienen in gleicher Weise der Modellbildung und der Analyse. Diese Disziplin markiert die Schwelle zwischen Anfänger- und Fortgeschrittenenstudium.

Differentialgleichungen sind also in mehrfacher Weise von zentraler Bedeutung. Ein gründliches Studium dieses Faches sollte für alle angehenden Mathematiker selbstverständlich sein. Ebenso zwingend erscheint ein Erlernen der Numerischen Mathematik.

Empfiehlt man dem Lehramtsstudenten entsprechende Vorlesungen, so muß man ihn möglicherweise anderweitig entlasten. Hier wird es kontroverser; mögliche Gewichtsverschiebungen können hier nicht ausdiskutiert werden. Analysis und *Lineare* Algebra bleiben unverzichtbare Grundlage des Studiums. Muß ein Lehramtskandidat aber beispielsweise eine Wahl treffen zwischen Differentialgleichungen und einer *Vertiefung* in Algebra, so scheint es im Hinblick auf den oben diskutierten Stand der Mathematik sinnvoll zu sein, mit Differentialgleichungen zu beginnen. Algebraische Fächer finden zwar wichtige Anwendungen, wie in der Physik und der Cryptographie, dürften aber zum elementaren Verständnis der Wissenschaften weniger beitragen als Differentialgleichungen. Neben die Differentialgleichungen tritt die Numerische Mathematik. Außerdem auch noch Optimierung oder *Partielle* Differentialgleichungen zu empfehlen muß wohl ein unrealistischer Traum bleiben. Wie schön wäre es, wenn der Mathematiklehrer als Hauptrepräsentant der Mathematik etwa eine Finite-Element-Werbegraphik eines Automobilherstellers seiner staunenden Umwelt als Mathematik entdecken könnte.

Im Hinblick auf die zunehmend enge Verflechtung zwischen Mathematik und übrigen Disziplinen sind *Fallstudien* hervorragend geeignet (ähnlich Projektstudium). Die notwendige Motivierung wird von Haus aus gleich mitgeliefert. Mathematische Methoden und außer-mathematische Anwendung werden simultan studiert. Besser als jede Erklärung machen Fallstudien das Wechselspiel zwischen Modellierung, Interpretation und Rückkopplung klar. Die Macht der Mathematik wird deutlich.

3. Beispiel: Tonarm eines Schallplattenspielers

Als Beispiel für eine Fallstudie sei der optimale Kröpfungswinkel eines herkömmlichen Schallplatten-Spielers betrachtet. Die Variablen sind:

a : Einbautiefe des Tonarms
l : effektive Tonarmlänge
β : Kröpfungswinkel
γ : tangentialer Spurfehlerwinkel
φ : Hilfswinkel (vgl. Figur 1)
r : Abstand Nadel - Plattenmittelpunkt M
R_a, R_i : Außen- bzw. Innenradius

Das mathematische Modell folgt aus dem Cosinus-Satz:

$$\cos\varphi = (l^2+r^2-a^2)/2rl =: Q$$

Es folgt $\varphi=\arccos(Q)$ und

$$\gamma+\beta = 90^\circ - \arccos(Q) = \arcsin(Q),$$

Damit ist der tangentiale Spurfehlerwinkel

$$\gamma = \gamma(r;a,l,\beta) = -\beta + \arcsin(Q) .$$

Eine Kurvendiskussion zeigt, daß $\gamma(r)$ von konvexer Gestalt

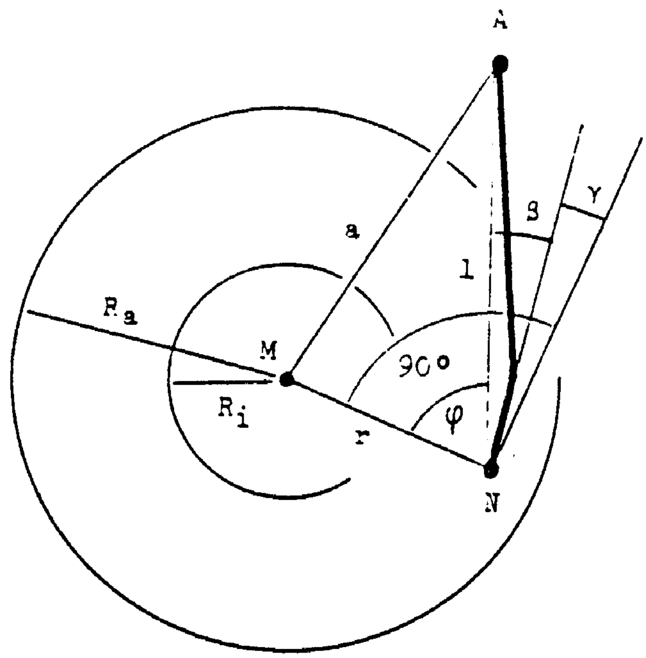

Fig.1

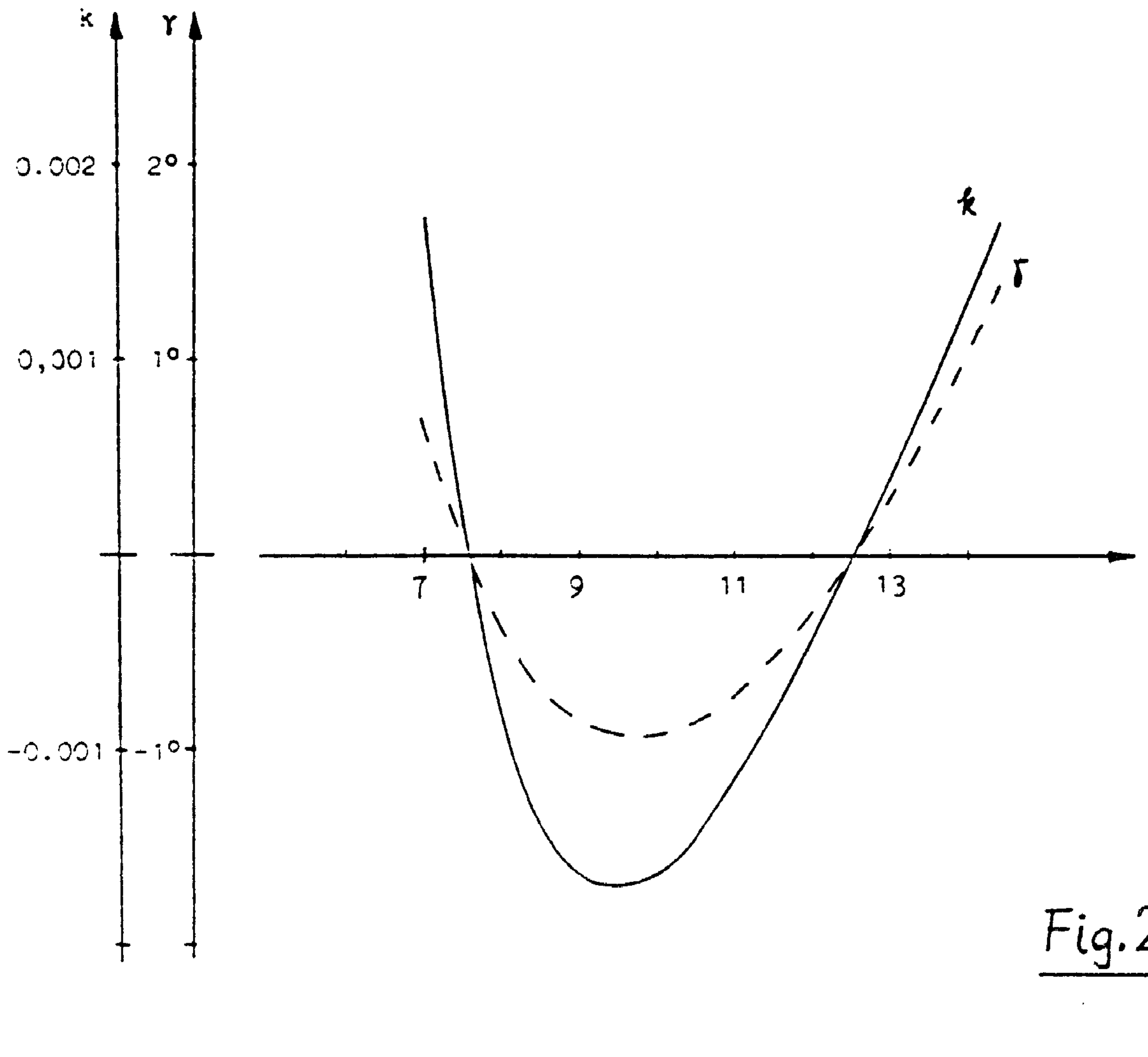

Fig.2

ist. Der Graph ist auf Grund des linearen β-Terms frei verschieblich. Damit $|\gamma|$ klein ist, muß γ im Intervall $R_i \leq r \leq R_a$ zwischen Außenradius R_a und Innenradius R_i zwei Nullstellen und deshalb auch eine waagerechte Tangente haben. Letzteres impliziert für ein r im Intervall einen rechten Winkel bei M,

$$l^2 - a^2 - r^2 = 0$$

und daher

$$a^2 + R_i^2 = l_{min}^2 \leq l^2 \leq l_{max}^2 = a^2 + R_a^2$$

Damit ist als notwendiges Kriterium für Optimalität $l > a$ gezeigt; dies ist die oben erwähnte Forderung, daß der Tonarm länger sein muß als die Einbautiefe.

Für die tatsächliche Optimierung muß berücksichtigt werden, daß wegen der konstanten Drehgeschwindigkeit die Information in den "inneren" Rillen dichter geschnitten ist als außen. Die durch γ bewirkte hörbare Verzerrung ist deshalb proportional zu

$$k(r; a, l, \beta) := \gamma / r$$

Wie $\gamma(r)$ hat auch $k(r)$ bei geeignetem β ein inneres Minimum mit $k < 0$ für $r = \xi$ sowie zwei Randmaxima mit $k > 0$. Für schlechte Konstruktionen ist charakteristisch, daß einer dieser drei extremalen Werte von k die beiden anderen überwiegt. Zur Berechnung einer günstigen Lösung wird für gegebenes a eine Kombination von l und β gesucht, für welche alle drei Extremwerte absolut den gleichen Wert erhalten. Diese Forderung führt auf drei nichtlineare Gleichungen für die Unbekannten l, β, ξ. Dieses System kann mit dem Newton-Verfahren numerisch gelöst werden.

Da Q nahe bei Null liegt, liegt es nahe, eine Vereinfachung vorzunehmen auf Grund von

$$\arcsin(Q) \approx Q .$$

Dies führt auf eine Ersatzfunktion für k, deren Minimum durch elementaren Kalkül analytisch berechnet werden kann. Damit ist ξ eliminiert, und die verbleibenden zwei Gleichungen können ebenfalls analytisch gelöst werden. Die erhaltene Lösung für l stimmt mit der vollen Lösung gut überein. Der Wert für β ist durch *Auslöschung* verfälscht und bedarf einer Korrektur, die auf graphischem Wege leicht zu erhalten ist. Wegen Details sei auf [10] verwiesen.

Mit ein bißchen Mut zu Lücken läßt sich eine solche Fallstudie auch an Schulen mit Gewinn diskutieren, etwa in Arbeitsgemeinschaften. Es entsteht ein tatsächlich brauchbares Ergebnis, das der Schüler oder Student mit nach Hause nehmen und dort mit dem Winkelmesser nachprüfen kann. Hochgradige Motivation wird vielleicht sogar von ein wenig Stolz auf ein selbst hergeleitetes Resultat begleitet.

Ein Mikrokosmos von mathematischen Fragestellungen tut sich auf, in den man mehr oder weniger tief einsteigt. Elementare Geometrie, Umgang mit trigonometrischen Funktionen und dem Kalkül, Extrema auf beschränkten Gebieten sind hier gefragt. Von der Numerischen Mathematik kann eingebracht werden das Newton-Verfahren (mehrdimensional) und der Begriff der Auslöschung. Skepsis und Zurückhaltung mit Resultaten werden nahegelegt, wenn die empfindliche Abhängigkeit der Optimierung von den Daten diskutiert wird (hier vom Innenradius der Schallplatte); auch der Genauigkeitsverlust durch Auslöschung mahnt zur Vorsicht. Weitere Grenzen der Mathematik bzw. Anregungen für weitere Untersuchungen werden durch das Fehlen einer Eindeutigkeitsaussage nahelegt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß durch eine geeignete Fachauswahl während des Studiums, verbunden mit einem Einsatz von Fallstudien, die Mathematik-Ausbildung am Puls der "wirklichen" Mathematik bleiben kann. Die Botschaft, die der Lehrer an der Universität empfangen und an die Schüler (und damit langfristig an die Öffentlichkeit) weitergeben sollte, ist: Mathematik verbirgt sich überall im täglichen Leben.

Literatur

[1] R.Bulirsch: Sind die Mathematiker - ist die Mathematik zu etwas nütze? Festschrift für L.Späth. Springer, Berlin 1987

[2] David Committee's Report: Renewing U.S.Mathematics: Critical Resource for the Future. Notices of the AMS 31 (1984) 435-466

[3] A.Jaffe: Ordering the Universe: The Role of Mathematics. SIAM Review 26 (1984) 473-500

[4] P.D.Lax: Mathematics and its Applications. Mathem. Intelligencer 8,4 (1986) 14-17

[5] R.E.McAllister, D.Noble, R.W.Tsien: Reconstruction of the Electrical Activity of Cardiac Purkinje Fibres. J.Physiol. 251 (1975) 1-59

[6] F.Natterer: The Mathematics of Computerized Tomography. Teubner, Stuttgart 1986

[7] C.S.Peskin: Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart. J.Comput.Phys. 25 (1977) 220-252

[8] J.T.Sandefur: Discrete Dynamical Systems - An Alternative to Calculus? SIAM News 20 (Mai 87) 3

[9] R.Seydel: From Equilibrium to Chaos. Practical Bifurcation and Stability Analysis. Elsevier, New York 1988

[10] R.Seydel, R.Bulirsch: Vom Regenbogen zum Farbfernsehen. Höhere Mathematik in Fallstudien aus Natur und Technik. Springer, Berlin 1986

[11] W.Schiehlen: Dynamik von Industrierobotern. Mitteilungen der GAMM (Sept. 1987) 7-26

[12] J.Stoer, R.Bulirsch: Einführung in die Numerische Mathematik II. Springer, Berlin 1979